САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2013 СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 2

Задачи подготовил:
Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2013 г.

Уровень «Новичок» (уровень A)

Задача № 1. «Что в списке лишнее?»

Условие. Вашему вниманию представлен список некоторых объектов исследования астрономии: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Вега, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Арктур, Плутон. Какие объекты в этом списке Вы считаете лишними? Почему? (2 балла).

Решение:

В списке из 11 приведенных объектов 9 объектов – это планеты Солнечной системы и лишь 2 объекта, Вега и Арктур – ярчайшие звезды северного полушария небосвода, небесные тела, не принадлежащие Солнечной системе. Следовательно, лишними в данном списке следует считать "меньшинство", – Вегу и Арктур.

Ответ: **Вега**, **Арктур**. ($\$_{\max} = 2$ балла).

Задача № 2. «Созвездия и небесные тела Солнечной системы»

Условие. Астроном-любитель сделал фотографию ночного неба (см. рис. 1). Определите, какие созвездия и какие небесные тела, принадлежащие Солнечной системе, видны на фотографии. (1 балл за правильно названное созвездие и небесное тело).

Рис. 1.

Решение:

Созвездия, представленные на фотографии, легко идентифицировать при сравнении последней с картами звездного неба или с картиной визуализации звездного неба какой-либо компьютерной программы, например Stellarium. На рис. 2 представлен скриншот указанной программы

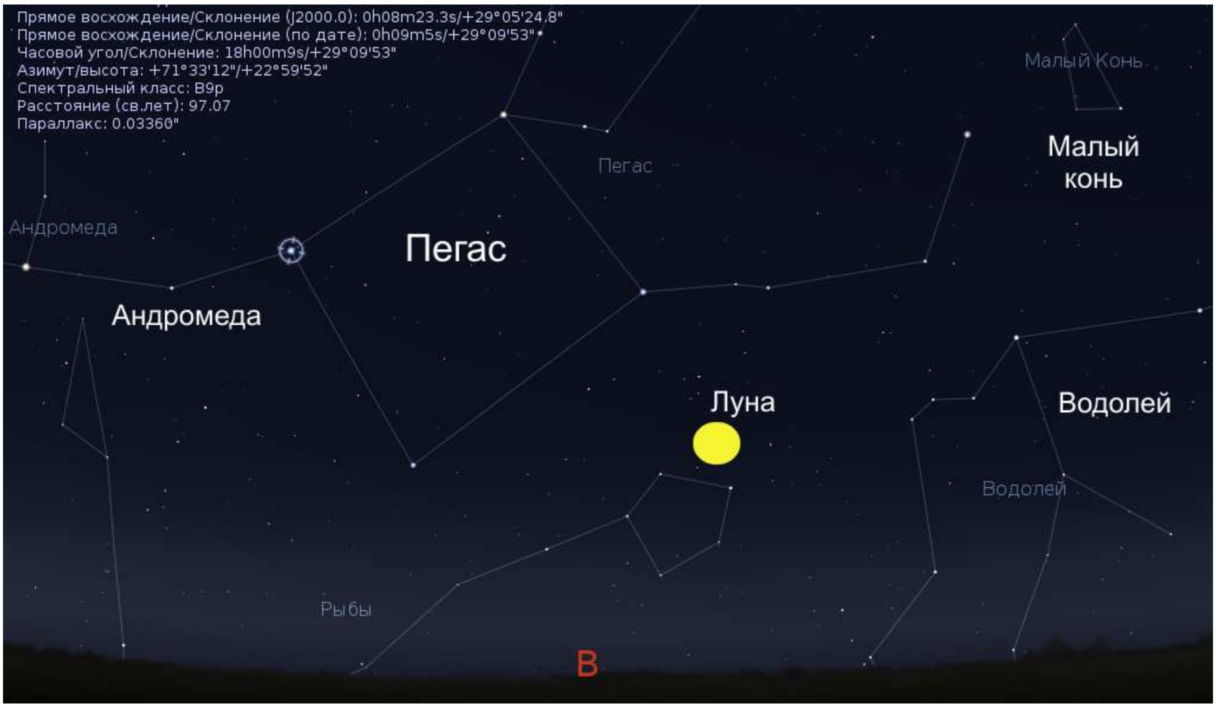

Рис. 2.

с указанием созвездий того же участка неба. Очевидно, что на исходной фотографии видны часть созвездий **Андромеда**, **Пегас**, **Водолей**, **Малый конь**. Созвездие Рыбы не видны из-за сильной засветки **Луны** – спутника Земли, тела Солнечной системы.

Ответ: **Андромеда**, **Пегас**, **Водолей**, **Малый конь**; **Луна**. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 3. «Угловой масштаб фотографии»

Условие. Используя угловой диаметр Луны (32′) и ее изображение на фото (см. рис. 1), оцените угловой масштаб фотографии μ – отношение углового размера рассматриваемого объекта к его линейному размеру, определенному по фотографии. Ответ представьте в град/мм (рекомендуется выполнить измерения по рисунку не менее 3 раз и затем в качестве опорного результата использовать среднее значение). (3 балла).

Дано:

$D''_{☾} = 32' = 0.53°$;

Найти:

μ – ?

Решение:

Как известно, *угловой масштаб фотографии* μ – отношение углового размера рассматриваемого объекта к его линейному размеру, определенному по фотографии, т.е.

$$\mu = \frac{D''_{☾}}{\bar{d}_{☾}}, \qquad (1)$$

где $\bar{d}_{☾}$ – средний линейный диаметр Луны, определенный по данным 3 измерений: $d^{(1)}_{☾}, d^{(2)}_{☾}, d^{(3)}_{☾}$. Согласно выполненным измерениям

$$d^{(1)}_{☾} = 3.5\,\text{мм}, \quad d^{(2)}_{☾} = 4.0\,\text{мм}, \quad d^{(3)}_{☾} = 3.5\,\text{мм}.$$

Данные результаты были получены по распечатке страницы с рис. 1 в стандартном формате A4. Результаты могут несколько отличаться от указанных, если Вы используете другой формат распечатки. Следует принимать во внимание следующую особенность измерения линейного диаметра Луны: *если вы собираетесь провести N измерений, то при каждом последующем измерении следует располагать линейку на видимом диске Луны, повернутую на угол $360°/N$, по отношению к предыдущему положению.* В этом случае удается уменьшить погрешности, обусловленные как эффектами сжатия изображения вдоль каких-либо направлений, так и дискретностью печати. В итоге

$$\bar{d}_{\leftmoon} = \frac{1}{3}\left(d_{\leftmoon}^{(1)} + d_{\leftmoon}^{(2)} + d_{\leftmoon}^{(3)}\right) = 3.67\,\text{мм}.$$

Следовательно, параметр $\mu = 0.15$ град/мм.

Ответ: $\mu = 0.15$ град/мм. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Высота Луны»

Условие. Используя результат для углового масштаба фотографии μ (полученный в предыдущей задаче), оцените высоту местоположения центра диска Луны (над горизонтом), если фото было получено астрономом с пригорка и линия горизонта для него лежит на уровне макушек самых высоких деревьев, расположенных в правом нижнем углу фотографии рис. 1. (3 балла).

Дано:

$\mu = 0.15$ град/мм;

Найти:

$h_{\leftmoon}$ – ?

Решение:

Для определения высоты Луны над горизонтом необходимо, прежде всего, определить положение последнего. Для этого полезно построить прямую, проходящую через макушки деревьев и перпендикулярную боковой границе кадра (это и будет, по сути, линия горизонта). От данной линии определяем расстояние до центра видимого диска Луны – $d_{\leftmoon} = 20$ мм.

Зная *угловой масштаб фотографии* η, можно легко определить высоту Луны:

$$h_{\leftmoon} = \mu \cdot d_{\leftmoon} = 3^\circ. \tag{2}$$

Ответ: $h_{\leftmoon} = 3^\circ$. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 5. «Расстояние до автомобиля»

Условие. Используя угловой масштаб фотографии μ (полученный в задаче 2), значение ширины капота (1620 мм) автомобиля ВАЗ-2109 (ближний к наблюдателю автомобиль на рис. 1), оцените расстояние от наблюдателя до этого автомобиля. Ответ представьте в метрах. (4 балла).

Дано:

$\mu = 0.15$ град/мм,
$D = 1.62$ м,

Найти:

r – ?

Решение:

Прежде всего определим ширину капота автомобиля по рисунку с помощью линейки, – $d_a = 12$ мм. Следовательно, видимая угловая ширина капота автомобиля равна (по аналогии с формулой (2)):

$$D_a'' = \mu \cdot d_a = 1.8^\circ. \tag{3}$$

Направление "наблюдатель-автомобиль"(OB на рис. 3) почти перпендикулярно фронтальной части (AC) последнего, следовательно, можно рассмотреть упрощенную схему, представленную на рис. 3.

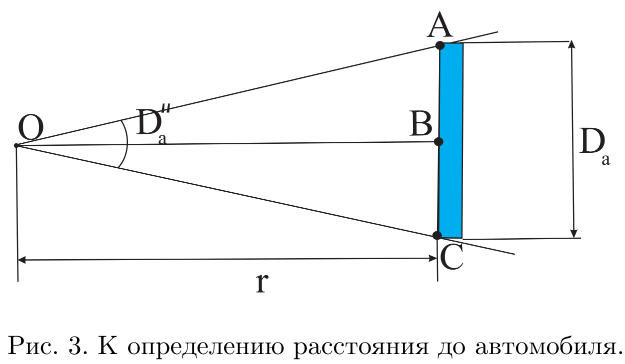

Рис. 3. К определению расстояния до автомобиля.

Здесь AC – капот автомобиля, в точке O находится наблюдатель. Необходимо определить расстояние $r = OB$. Из прямоугольного $\triangle OAB$ следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{D_a''}{2} = \frac{D_a/2}{r}, \;\Rightarrow\; r = \frac{D_a/2}{\operatorname{tg}(D_a''/2)}. \tag{4}$$

Поскольку $D_a'' < 5^\circ$, то $\operatorname{tg}(D_a''/2) \approx \sin(D_a''/2) \approx (D_a''/2)$, в последнем результате $[D_a''] =$рад.

$$r \approx \frac{D_a}{D''_a} = \frac{1.62\,(\text{м})}{(1.8/180) \cdot \pi} = 52\,(\text{м}). \tag{5}$$

Ответ: $r = 52$ м. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Средняя скорость Солнечной системы в Галактике»

Условие. Как известно, Солнечная система движется в Галактике по кривой близкой к окружности на расстоянии $r_{SS} = 7.62$ кпк. При этом один оборот вокруг центра Галактики система совершает за 238 млн. лет. Оцените среднюю скорость движения Солнечной системы относительно центра Галактики. Ответ представьте в км/с. (5 баллов).

Дано:

$r_{SS} = 7.62$ кпк,
$T_{SS} = 238$ млн. лет,

Найти:

$\bar{V}_{SS}$ – ?

Решение:

Согласно условию задачи, "Солнечная система движется в Галактике по кривой близкой к окружности", тогда пройденный путь за один оборот есть длина окружности:

$$\ell = 2\,\pi\,r_{SS} = 4.79 \cdot 10^4\,\text{пк} = 1.48 \cdot 10^{18}\,\text{км}. \tag{6}$$

В расчетах мы учли, что 1 пк $= 3.086 \cdot 10^{13}$ км. Учтем также, что 1 год $= 365.25$ сут $\times 24$ (час/сут) $\times$ 3600 (сек/час) $= 3.156 \cdot 10^7$ сек.

Следовательно, средняя скорость есть

$$\bar{V}_{SS} = \frac{\ell}{T_{SS}} = \frac{1.48 \cdot 10^{18}\,\text{км}}{7.51 \cdot 10^{15}\,\text{сек}} = 197\,\text{км/сек}. \tag{7}$$

Ответ: $\bar{V}_{SS} = \frac{\ell}{T_{SS}} = 197$ км/сек. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Звезда на горизонте»

Условие. При каких условиях зенитное расстояние звезды, находящейся в данный момент на горизонте, не будет меняться в течение суток? (6 баллов)

Решение:

Прежде всего, следует напомнить, что ***зенитное расстояние*** звезды – одна из ее горизонтальных координат, определяемая величиной дуги вертикала звезды (вертикального круга или круга высоты звезды), откладываемой от зенита до звезды. Очевидно, что описанная в условии ситуация реализуется в двух частных случаях:

1. Наблюдатель находится на одном из географических полюсов ($\varphi = \pm 90°$), а звезда находится на небесном экваторе ($\delta = 0°$), см. рис. 4. В данном случае плоскости небесного экватора и математического горизонта совпадают и, потому звезда всегда будет оставаться на горизонте ($z = 90°$).

2. Наблюдатель находится на географическом экваторе ($\varphi = 0°$), а звезда находится в одном из полюсов мира ($\delta = \pm 90°$), см. рис. 5. В этом случае ось мира лежит в плоскости горизонта и не меняет своего положения с течением времени, следовательно, и положение полюсов мира, находящихся на горизонте, в течение суток также остается неизменным.

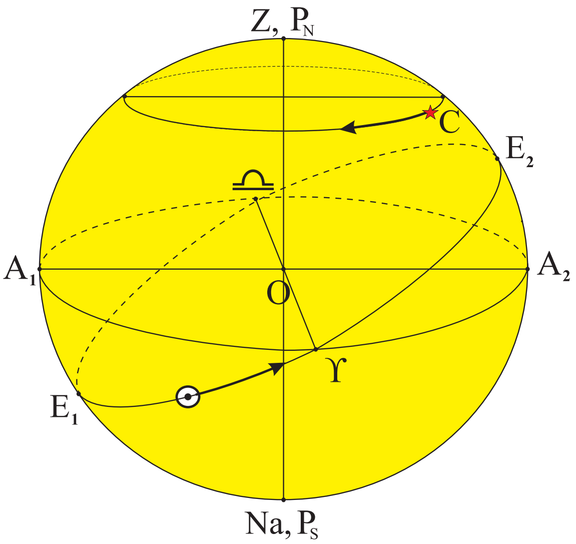

Рис. 4. Суточное вращение н.с. на полюсах.

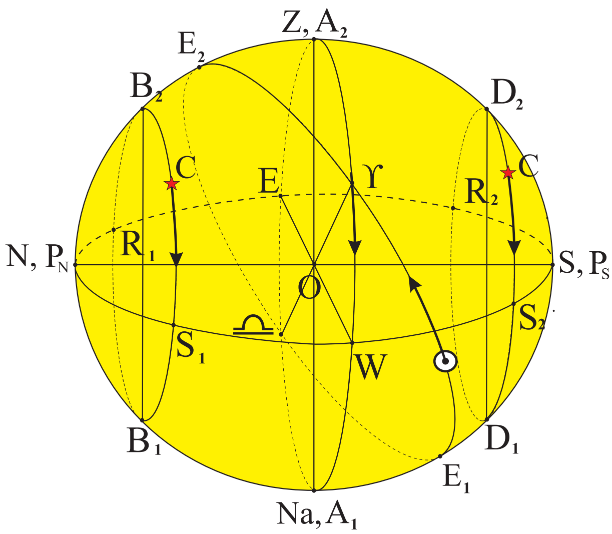

Рис. 5. Суточное вращение н.с. на экваторе.

Ответ: 1) наблюдатель находится на одном из географических полюсов ($\varphi = \pm 90°$), а звезда находится на небесном экваторе ($\delta = 0°$); 2) наблюдатель находится на географическом экваторе ($\varphi = 0°$), а звезда находится в одном из полюсов мира ($\delta = \pm 90°$). ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 8. «Средняя площадь одного созвездия»

Условие. Оцените среднюю площадь одного созвездия в квадратных градусах и стерадианах. (7 баллов)

Решение:

Предварительно проведем *аналогию между угловыми и линейными величинами*: мерой любого одномерного объекта, например, нити является ее *длина* ℓ, а мерой различия направлений в пространстве двух лучей, испущенных из одной точки, является *плоский угол* φ, причем определение последнего всегда связано с плоскостью, содержащей данные лучи. Мерой двухмерного объекта, например, поверхности шара является ее *площадь* S. Аналогично рассуждая, можно ввести двумерный аналог плоского угла – *телесный угол* Ω. Если длина измеряется в метрах, а площадь – в квадратных метрах, то телесный угол, следовательно, должен измеряться в квадратных градусах. ***Квадратный градус*** – это участок на небесной сфере размером $1° \times 1°$.

Как известно, общее количество созвездий на небе известно $N = 88$. Следовательно, оценка средней площади одного созвездия сводится к оценке телесного угла, отвечающего среднему участку небесной сферы, выраженному в квадратных градусах.

Неплохую оценку можно получить, сравнив небесную сферу с поверхностью Земли, на которой координаты каждой точки задаются широтой (диапазон изменения которой составляет 180°) и долготой (диапазон изменения 360°). Тогда в качестве оценки можно сказать, что поверхность любой сферы (и Земли, и небесной сферы в том числе) составляет примерно $180° \circ 360° \approx 65$ тыс. квадратных градусов. На самом деле этот результат несколько завышен, поскольку в окрестности полюсов сферы меридианы сходятся, однако для оценки им можно воспользоваться. В итоге получаем, что средняя площадь одного созвездия составляет $65000/88 \approx 700$ квадратных градусов.

Стерадиан (срад) – это альтернативная квадратному градусу единица измерения телесного угла. Телесный угол всей поверхности сферы равен $\Omega_{sphere} = 4\pi$ срад (этот результат хорошо известный из курса математики, его можно найти, например, в справочнике по математике Выгодского). Следовательно, в стерадианах площадь одного созвездия составляет $4\pi/88 \approx 0.14$ срад.

Ответ: 700 квадратных градусов или 0.14 срад. ($\$_{\max} = 7$ баллов).

Задача № 9. «Определение широты объекта с помощью ГЛОНАСС»

Условие. В настоящее время система ГЛОНАСС определяет местонахождение объекта на поверхности земного шара с погрешностью, равной 3.0 м. После перевода в рабочее состояние двух спутников коррекции сигнала системы "Луч" точность навигационного сигнала ГЛОНАСС возрастет, а погрешность уменьшится до 1.0 м. Какова погрешность ГЛОНАСС в определении географической широты сегодня и какова будет после активации системы "Луч"? (7 баллов).

Дано:

$\Delta\ell_1 = 3$ м,
$\Delta\ell_2 = 1$ м,
$R_\oplus = 6378$ км.

Найти:

$\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ – ?

Решение:

Будем полагать, что Земля есть шар радиуса $R_\oplus$, тогда длина земного меридиана, вдоль которого откладывается широта φ составляет $L_\oplus = 2\pi\, R_\oplus = 4.0074 \cdot 10^7$ м, что отвечает углу в $\alpha = 360° = 1.296 \cdot 10^7\,''$.

Далее составляем пропорцию: длине меридиана $\Delta\ell$ соответствует погрешность $\Delta\varphi$, а всему меридиану длины $L_\oplus$ отвечает угол α, тогда

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\Delta\ell}{L_\oplus}\right)\alpha, \;\Rightarrow\; \Delta\varphi_1 = 0.097'', \;\; \Delta\varphi_2 = 0.032''. \qquad (8)$$

Следовательно, погрешность ГЛОНАСС в определении географической широты сегодня $\Delta\varphi_1 = 0.097''$ и после активации системы "Луч" будет $\Delta\varphi_2 = 0.032''$.

Ответ: $\Delta\varphi_1 = 0.097''$, $\Delta\varphi_2 = 0.032''$. ($\$_{\max} = 7$ баллов).

Задача № 10. «Угол между эклиптикой и горизонтом»

Условие. Какой угол образует эклиптика с горизонтом в моменты восхода и захода точки весеннего равноденствия для наблюдателя, находящегося в г. Самара ($\varphi = 53°12'$)? (8 баллов)

Решение:

Определим прежде всего, какой угол образует небесный экватор с плоскостью математического горизонта в г. Самара.

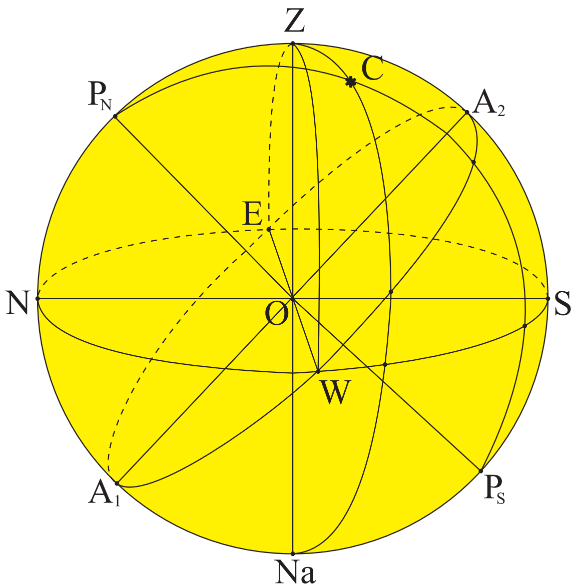

Рис. 6. К определению угла между экватором и горизонтом.

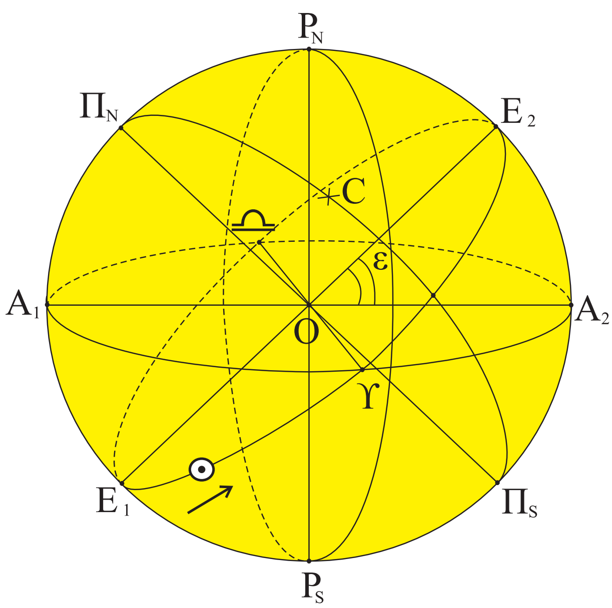

Рис. 7. К определению угла между экватором и эклиптикой.

Согласно рис. 6 это угол $\angle A_2OS = 90° - \angle ZOA_2$. С использованием теоремы о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами, легко убедиться в том, что $\angle ZOA_2 = \angle NOP_N$, последний угол есть высота северного полюса мира над горизонтом $\angle NOP_N = h_{P_N}$. Согласно первой теореме о связи небесных и географических координат имеем $h_{P_N} = \varphi$, тогда $\angle A_2OS = 90° - h_{P_N} = 36°48'$.

Далее рассмотрим расположение эклиптики по отношению к экватору. Если точка весеннего равноденствия Υ заходит за горизонт (на рис. 7 показан случай, для наблюдателя, находящегося на северном географическом северном полюсе), то в этот момент точка E_2 летнего солнцестояния находится в своей верхней кульминации, а сама эклиптика возвышается над экватором на угол $\varepsilon = 23°26'$. В момент восхода точки весеннего равноденствия ситуация обратная – точка E_1 зимнего солнцестояния находится в своей верхней кульминации, а сама эклиптика находится ниже экватора на угол ε. Т.о. угол α, который образует эклиптика с горизонтом в моменты восхода и захода точки весеннего равноденствия для наблюдателя, находящегося в г. Самара:

$$\text{заход точки } \Upsilon: \quad \alpha_s = 90° - \varphi + \varepsilon = 60°14', \tag{9}$$

$$\text{восход точки } \Upsilon: \quad \alpha_r = 90° - \varphi - \varepsilon = 13°22'. \tag{10}$$

Замечание: следует отметить, что указанные значения являются также значениями высоты Солнца в верхней кульминации в день летнего (21-22 июня) и зимнего (21-22 декабря) солнцестояния.

<u>Ответ:</u> заход точки Υ: $\alpha_s = 90° - h_{P_N} + \varepsilon = 60°14'$, восход точки Υ: $\alpha_r = 90° - h_{P_N} - \varepsilon = 13°22'$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «Средняя скорость лунохода»

<u>Условие.</u> Советский аппарат "Луноход-2" работал на Луне с 15 января по 4 июня 1973 года и за это время прошел по поверхности Луны 37 км. Учитывая, что "Луноход-2" двигался только лунными днями (непрерывно в течение всего лунного дня), оцените возможную среднюю скорость его движения (9 баллов).

<u>Дано:</u>	***<u>Решение:</u>***
$t \in (15.01 \div 04.07).1973$, $\Delta\ell = 37$ км,	С 15 января по 4 июня прошло 140 земных суток. Лунные сутки продолжаются около месяца (в среднем 29.5 земных суток). Таким образом за этот же период прошло около 4.7 лунных суток. Но мы не знаем, сколько прошло лунных дней. Представим себе, что ровно 15 января 1973 года начался очередной лунный день.
<u>Найти:</u> $\bar{V}$ – ?	Тогда "Луноход-2" имел возможность двигаться в течение 4 лунных дней и еще в течение 0.5 лунных суток, которые тоже пришлись на дневное время (т.е. в общей сложности 5 лунных дней).

Если же 15 января как раз началась лунная ночь, то лунных дней в распоряжении "Луноход-2" было 4.4 (за время работы прошло четыре пары "ночь-день", пятая ночь и еще 0.2 суток, соответствующих 0.4 дня, пришлись на дневное время). Все другие варианты – промежуточные между этими двумя. Будем считать, что лунный день – это ровно половина лунных суток (так как "Луноход-2" прилунился недалеко от лунного экватора, то это предположение недалеко от истины).

Тогда наибольшее время, которое "Луноход-2" мог двигаться по поверхности Луны, равно $\Delta t_{\max} = 5 \times 0.5 = 2.5$ лунных суток, или $2.5 \cdot 29.5 = 74$ земных суток, а наименьшее время – $\Delta t_{\min} = 4.4 \cdot 0.5 = 2.2$ лунных суток, или $2.2 \cdot 29.5 = 65$ земных суток. Отсюда наименьшая возможная средняя скорость "Лунохода-2" $\bar{V}_{\min}$ равна

$$\bar{V}_{\min} = \frac{\Delta\ell}{\Delta t_{\max}} = \frac{37\,\text{км}}{74\,\text{земн. сут}} = 0.5\,\text{км/земн. сут} = 21\,\text{м/ч}, \tag{11}$$

а наибольшая возможная средняя скорость $\bar{V}_{\max}$:

$$\bar{V}_{\max} = \frac{\Delta \ell}{\Delta t_{\min}} = \frac{37\,\text{км}}{65\,\text{земн. сут}} = 0.57\,\text{км/земн. сут} = 24\,\text{м/ч}. \qquad (12)$$

Таким образом, средняя скорость "Лунохода-2" могла быть в интервале

$$21\,\text{м/ч} \le \bar{V} \le 24\,\text{м/ч}. \qquad (13)$$

Ответ: $21\,\text{м/ч} \le \bar{V} \le 24\,\text{м/ч}$. ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12. «Неупругое столкновение ядер комет»

Условие. Согласно современным представлениям на окраинах Солнечной системы существует гипотетическое облако ледяных тел – облако Оорта, являющееся источником долгопериодических комет. Общее количество кометных ядер в облаке может достигать нескольких триллионов, и потому возможны их столкновения. Ядра комет состоят преимущественно из водяного льда и имеют радиус, в среднем, больший 1.3 км. Предположим, что навстречу друг другу со скоростями, равными по величине V, летят два одинаковых ледяных ядра. При каком наименьшем значении скорости V они полностью испарятся в результате неупругого удара? Начальная температура льда -265 °C, удельная теплоемкость льда $c_1 = 2.1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C), удельная теплоемкость воды $c_2 = 4.2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг, удельная теплота парообразования для воды $q = 2.3$ МДж/кг. Потери энергии системы за счет излучения не учитывать (10 баллов).

Дано:

$\bar{R}_N \ge 1.3$ км,
$T_0 = -265°$ C,
$c_1 = 2.1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C),
$c_2 = 4.2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C),
$\lambda = 334$ кДж/кг,
$q = 2.3$ МДж/кг,

Найти:

$\bar{V}$ – ?

Решение:

Согласно закону сохранения импульса, имеем

$$m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 = 0, \;\Rightarrow\; \vec{V}_1' = \vec{V}_2' = 0. \qquad (14)$$

Следовательно, вся кинетическая энергия данных ядер тратится на изменение их внутренней энергии:

$$2\frac{m\,V^2}{2} = \Delta U. \qquad (15)$$

Изменение внутренней энергии должно сопровождаться следующими процессами:

1. нагревом льда от температуры T_0 до температуры его плавления $T_1 = 0°$ C, для чего требуется количество теплоты Q_1:

$$Q_1 = 2m\,c_1(T_1 - T_0), \qquad (16)$$

2. плавлением льда при температуре $T_1 = 0°$ C, для чего требуется количество теплоты Q_2:

$$Q_2 = 2m\,\lambda, \qquad (17)$$

3. нагревом воды от температуры T_1 до температуры ее кипения $T_2 = 100°$ C, для чего требуется количество теплоты Q_3:

$$Q_3 = 2m\,c_2(T_2 - T_1), \qquad (18)$$

4. испарением воды при температуре $T_2 = 100°$ C, для чего требуется количество теплоты Q_4:

$$Q_4 = 2m\,q. \qquad (19)$$

Согласно закону сохранения энергии полное количество теплоты, переданное твердому телу тратится на изменение его внутренней энергии:

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4. \tag{20}$$

Из выражений (15) и (20) следует, что

$$2\frac{m\,V^2}{2} = 2m\,c_1(T_1 - T_0) + 2m\,\lambda + 2m\,c_2(T_2 - T_1) + 2m\,q,$$

откуда следует, что минимальная скорость ядра кометы есть

$$V_{\min} = \sqrt{2(c_1(T_1 - T_0) + \lambda + c_2(T_2 - T_1) + q)} =$$
$$= \sqrt{2(5.57\cdot 10^5 + 3.34\cdot 10^5 + 4.20\cdot 10^5 + 23.0\cdot 10^5)\text{Дж/кг}} = 2.69\,\text{км/с}. \tag{21}$$

Т.о. если скорость каждого ядра кометы больше и равна $V_{\min}$, то в результате абсолютно неупругого удара данные тела полностью испарятся.

Ответ: $V_{\min} = \sqrt{2(c_1(T_1 - T_0) + \lambda + c_2(T_2 - T_1) + q)} = 2.69$ км/с. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень C)

Задача № 13. «Движение "останков" сверхновых»

Условие. Много лет назад в нашей Галактике недалеко друг от друга вспыхнули две Сверхновые. В результате вспышек образовалось два «пузыря» из горячего и разреженного межзвездного газа, плотность вещества которых меньше плотности окружающей межзвездной среды. Затем эти два «пузыря» начали двигаться относительно ближайших к ним звезд в диаметрально противоположных направлениях. Почему «пузыри» начали двигаться? Почему направления движения оказались противоположными? (11 баллов).

Решение:

Газ внутри "пузырей" менее плотный, чем окружающая среда. Следовательно, если в окрестности "пузырей" действует тяготение (что, конечно, верно), то "пузыри" в соответствии с обычным законом Архимеда, должны всплывать вверх. Но что значит "вверх"в Галактике? Известно, что в простейшем приближении наша Галактика представляет собой сравнительно тонкий диск. Поэтому для всех объектов Галактики направлением "вверх" против силы тяжести будет направление от диска. Тогда, если два "пузыря" оказались с двух разных сторон относительно плоскости диска, направления, в которых на них будет действовать сила Архимеда, окажутся практически противоположными.

Ответ: Движение началось в силу ненулевой суммы векторов сил тяготения и Архимеда. Направления движения противоположны, поскольку "пузыри"оказались по разные стороны относительно плоскости симметрии диска Галактики. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Высота Солнца в полдень»

Условие. Высота Солнца в полдень в день летнего солнцестояния была $73°25'$ (к югу от зенита), а в день зимнего солнцестояния $26°35'$. Определите географическую широту места наблюдения и угол наклона ε эклиптики к экватору. Оцените год, в который могло (или будет) иметь место описанное явление, если закон изменения угла ε со временем описывается уравнением вида:

$$\varepsilon = 23°26'21.448'' - 46.8150''\cdot t, \tag{22}$$

где t – число столетий, прошедших от начала 2000 года (12 баллов).

Дано:

$h_{\max} = 73°25'$,
$h_{\min} = 26°35'$

Найти:

φ, ε, T – ?

Решение:

Воспользуемся замечанием к решению задачи № 10 и результатами (9) и (10), тогда высота Солнца в полдень в день летнего солнцестояния есть

$$h_{\max} = 90° - \varphi + \varepsilon, \tag{23}$$

высота Солнца в полдень в день зимнего солнцестояния есть

$$h_{\min} = 90° - \varphi - \varepsilon. \tag{24}$$

Решая полученную систему уравнений (23) и (24) относительно искомых параметров φ и ε, в итоге получаем:

$$\varphi = 90° - \frac{1}{2}\left(h_{\max} + h_{\min}\right) = 40°0'. \tag{25}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(h_{\max} - h_{\min}\right) = 23°25'. \tag{26}$$

Очевидно, что полученное значение для угла ε меньше соответствующего значения 2000 года, тогда рассматриваемая ситуация реализуется в будущем. Определим, какой промежуток времени отделяет данное событие от 2000 года:

$$23°26'21.448'' - 46.8150''/\text{век} \cdot t_0 = 23°25'00'', \;\Rightarrow\; 23.43929° - 0.01300°/\text{век} \cdot t_0 = 23.41667°, \;\Rightarrow$$

$$t_0 = \frac{0.02262}{0.01300} = 1.740 \text{ столетий} = 174 \text{ года}. \tag{27}$$

Следовательно, ситуация рассмотренная в условии задачи, реализуется для земного наблюдателя, находящегося на широте $\varphi = 40°0'$, в 2174 году нашей эры.

Ответ: $\varphi = 40°0'$, $\varepsilon = 23°25'$, $T = 2174$ год н.э. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Открытие колец у Реи – спутника Сатурна»

Условие. В 2008 году специалисты NASA объявили о "непрямом открытии" пылевых колец у Реи – второго по размерам и массе спутника Сатурна, с помощью КА "Кассини". Открытие было сделано с использованием "эффекта тени", наблюдавшейся в потоке электронов, движущихся от Сатурна и регистрируемых КА.

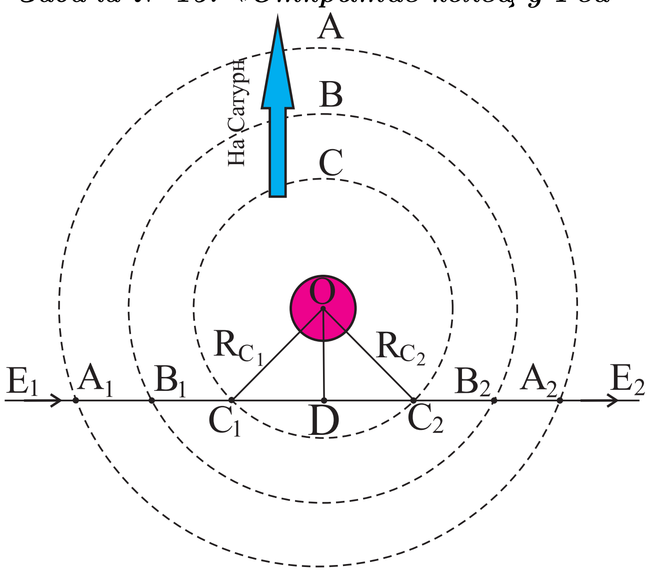

Рис. 8. К определению радиусов колец.

Кольцо C	
t_1	t_2
$t_{C_2} = 22^{\text{ч}}40^{\text{м}}00^{\text{с}}$	$t_{C_1} = 22^{\text{ч}}35^{\text{м}}18^{\text{с}}$
Кольцо B	
$t_{B_2} = 22^{\text{ч}}40^{\text{м}}45^{\text{с}}$	$t_{B_1} = 22^{\text{ч}}34^{\text{м}}44^{\text{с}}$
Кольцо A	
$t_{A_2} = 22^{\text{ч}}41^{\text{м}}27^{\text{с}}$	$t_{A_1} = 22^{\text{ч}}34^{\text{м}}06^{\text{с}}$

Когда КА проходил мимо Рэи по прямолинейной траектории, по другую сторону от Сатурна, в точках A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 его траектории (см. рис. 8) отчетливо наблюдалась тень от колец. Используя известные данные наблюдений $OD = 1251$ км, $t_D = 22^{\text{ч}}37^{\text{м}}39^{\text{с}}$ – момент прохождения

КА через точку D – центр тени Реи, значения моментов времени пребывания КА в указанных точках t_1, t_2 и относительной скорости движения аппарата $v = 7.272$ км/с, определите значения радиусов колец Реи. Ответ представьте средними значениями искомых величин. (13 баллов).

Решение:

Согласно условию задачи траектория движения – прямая, а скорость движения – постоянная величина v, следовательно, используя указанные моменты времени, можно найти следующие отрезки:

$$r_{A_1} = A_1D = v(t_D - t_{A_1}),\ \ r_{A_2} = DA_2 = v(t_{A_2} - t_D);$$
$$r_{B_1} = B_1D = v(t_D - t_{B_1}),\ \ r_{B_2} = DB_2 = v(t_{B_2} - t_D);$$
$$r_{C_1} = C_1D = v(t_D - t_{C_1}),\ \ r_{C_2} = DC_2 = v(t_{C_2} - t_D).$$

Зная минимальное расстояние, на которое сблизился аппарат $r = OD$, можно по теореме Пифагора найти радиусы колец:

$$R_{A_1} = \sqrt{r^2 + r_{A_1}^2},\ \ R_{A_2} = \sqrt{r^2 + r_{A_2}^2},$$
$$R_{B_1} = \sqrt{r^2 + r_{B_1}^2},\ \ R_{B_2} = \sqrt{r^2 + r_{B_2}^2},$$
$$R_{C_1} = \sqrt{r^2 + r_{C_1}^2},\ \ R_{C_2} = \sqrt{r^2 + r_{C_2}^2}. \tag{28}$$

Кольца, в общем случае, могут иметь форму эллипса и характеризоваться относительно небольшими коэффициентами сжатия. Далее будем пренебрегать эллиптичностью колец, полагая, что кольца имеют форму окружностей, тогда средние радиусы колец есть:

$$R_A = \frac{R_{A_1} + R_{A_2}}{2},\ \ R_B = \frac{R_{B_1} + R_{B_2}}{2},\ \ R_C = \frac{R_{C_1} + R_{C_2}}{2}. \tag{29}$$

Используя известные данные наблюдений $r = 1251$ км, $t_D = 22^{\text{ч}}37^{\text{м}}39^{\text{с}}$, t_1, t_2 и значение относительной скорости движения аппарата $v = 7.272$ км/с, мы выполнили расчет, согласно предложенному алгоритму, и получили следующие результаты, представленные в таблице 1.

Таблица 1

Кольцо C						
t_1	t_2	r_1, км	r_2, км	R_1, км	R_2, км	R, км
$22^{\text{ч}}40^{\text{м}}00^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}35^{\text{м}}18^{\text{с}}$	1025.4	1025.4	1615	1615	1615
Кольцо B						
$22^{\text{ч}}40^{\text{м}}45^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}34^{\text{м}}44^{\text{с}}$	1352.7	1272.7	1841	1784	1813
Кольцо A						
$22^{\text{ч}}41^{\text{м}}27^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}34^{\text{м}}06^{\text{с}}$	1658.1	1549.0	2077	1991	2034

Ответ: $R_A = 2034$ км, $R_B = 1813$ км, $R_C = 1615$ км ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Высота кульминации Луны»

Условие. На какой максимальной и минимальной высоте может кульминировать Луна в г. Самара? Наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики $i = 5^0 9'$, широта г.Самары $\varphi = 53°12'$. (13 баллов).

Дано:

$i = 5^0 9'$,
$\varphi = 53°12'$.

Найти:

$h_{\min}, h_{\max}$ – ?

Решение:

Так как угол между плоскостью орбиты Луны и эклиптикой $i = 5°9'$, а угол между эклиптикой и небесным экватором $\varepsilon = 23°26'$, то склонение Луны может изменяться, в принципе, в следующих пределах:

$$-(i+\varepsilon) \le \delta_☾ \le +(i+\varepsilon), \text{ или } -28°35' \le \delta_☾ \le +28°35'. \qquad (30)$$

Используя известный результат для высоты светила в верхней кульминации, можно определить максимальную высоту верхней кульминации Луны:

$$h_{max} = 90° - \varphi + \delta_{\max} = 90° - 53°12' + 28°35' = 65°23'. \qquad (31)$$

Аналогично рассуждая, определим минимальную высоту в верхней кульминации

$$h_{min} = 90^0 - \varphi + \delta_{\min} = 90^0 - 53^0 12' - 28^0 35' = 8°13'. \qquad (32)$$

Замечание: следует отметить, что в верхней кульминации Луну можно наблюдать на максимальной высоте зимой (конец декабря – начало января) во время полнолуния. В это время направление на Луну практически противоположно направлению на Солнце, т.е. Луна находится примерно в той же области небесной сферы (вблизи точки летнего солнцестояния), в какой полгода назад (летом) находилось Солнце, а высота Солнца летом максимальна. Минимальная высота в момент кульминации возможна летом (конец июня – начало июля) во время полнолуния, так как в это время Луна будет находится вблизи точки зимнего солнцестояния.

Ответ: $h_{max} = 65°23'$, $h_{min} = 8°13'$. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Падение астероида на Меркурий»

Условие. Астероид, с радиусом $R_a = 50$ м и массовой плотностью $\rho_a = 4$ г/см^3, прилетевший с окраин Солнечной системы, падает на поверхность Меркурия. Определить минимальную и максимальную скорость падения метеороида на поверхность планеты? В расчетах следует учесть орбитальное (круговое) движение Меркурия. Какое минимальное и максимальное количество теплоты может выделиться в результате падения астероида, если известно, что в тепло перешло 80% его конечной кинетической энергии? (14 баллов).

Дано:

$R_a = 50$ м,
$\rho_a = 4$ г/см^3.
$\eta = 0.8$.

Найти:

$h_{\min}, h_{\max}$ – ?

Решение:

Согласно условию задачи, тело прилетает к Меркурию (Солнцу) с окраин нашей системы, двигаясь в гравитационных потенциальных полях Солнца и Меркрия. В силу закона сохранения энергии его потенциальная энергия гравитационного притяжения Солнцем и Меркурием по мере сближения с последним уменьшается, при этом увеличивается кинетическая энергия:

$$-\frac{G\cdot\mathfrak{M}_a\cdot\mathfrak{M}_\odot}{\Delta} - \frac{G\cdot\mathfrak{M}_a\cdot\mathfrak{M}_{☿}}{r} = \frac{\mathfrak{M}_a V_{\text{hc}}^2}{2} - \frac{G\cdot\mathfrak{M}_a\cdot\mathfrak{M}_{☿}}{R_{☿}} - \frac{G\cdot\mathfrak{M}_a\cdot\mathfrak{M}_\odot}{r_{☿}},$$

здесь $G = 6.673\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}_\odot = 1.989\cdot10^{30}$ кг – масса Солнца, $\mathfrak{M}_{☿} = 3.330\cdot10^{23}$ кг – масса Меркурия, $\mathfrak{R}_{☿} = 2439.7$ км – радиус Меркурия, $r_{☿} = 5.791\cdot10^7$ км – среднее расстояние Меркурия от Солнца (взяты из общих справочных астрономических данных); r, Δ – расстояния от астероида до Солнца и Меркурия, когда тело находилось на окраинах

Солнечной системы (в реальности эти значения могут принимать значения $\sim 10^5$ а.е., но формально можно полагать, что $r, \Delta \to \infty$), $\mathfrak{M}_a$ – масса астероида (который по условию задачи есть шар), представляется в виде:

$$\mathfrak{M}_a = \rho_a\, V_a = \frac{4}{3}\,\rho_a\,\pi\, R_a^3 = 2.094\cdot 10^9 \text{ кг}. \tag{33}$$

$V_{\rm hc}$ – гелиоцентрическая (относительно Солнца) скорость астероида у поверхности Меркурия. Поскольку $r, \Delta \to \infty$, тогда

$$V_{\rm hc} = \sqrt{2G\cdot\left(\frac{\mathfrak{M}_☿}{R_☿} + \frac{\mathfrak{M}_\odot}{r_☿}\right)} \approx \sqrt{2G\frac{\mathfrak{M}_\odot}{r_☿}} = 67.84\,\text{км/с}. \tag{34}$$

Для Меркурия, движущегося по круговой орбите, можем записать второй закон Ньютона:

$$\mathfrak{M}_♂\,\vec{a}_☿ = -\frac{G\mathfrak{M}_☿\mathfrak{M}_\odot}{r_☿^3}\vec{r}_☿,$$

здесь $\vec{r}_☿$ – радиус-вектор Меркурия, проведенный из центра Солнца, $\vec{a}_☿$ – его центростремительное ускорение. В таком движении Меркурий обладает центростремительным ускорением, равным $a_☿ = V_☿^2/r_☿$, где $V_☿$ – орбитальная скорость движения Меркурия вокруг Солнца. Проецируя исходное уравнение на направление "Меркурий-Солнце", легко определить $V_☿$:

$$V_☿ = \sqrt{\frac{G\cdot\mathfrak{M}_\odot}{r_☿}} = 47.87 \text{ км/с}. \tag{35}$$

Скорость астероида относительно Меркурия можно представить в виде:

$$\vec{V}_{\rm rel} = \vec{V}_{\rm hc} - \vec{V}_☿, \;\Rightarrow\; V_{\rm rel} = \sqrt{V_{\rm hc}^2 + V_☿^2 - 2V_{\rm hc}V_☿\cos\alpha}, \tag{36}$$

здесь α – угол между направлением движения Меркурия и вектором гелиоцентрической скорости тела. Из формулы (36) видно, что максимальное значение скорости достигается при $\alpha = \pi$, т.е. когда гелиоцентрическая скорости тела противоположна направлена по отношению к направлению движения планеты (метеороид встречает Меркурий с параболической скоростью со стороны апекса – точки на небе, указывающей направление движения Меркурия вокруг Солнца). Следовательно, $V_{\max} = V_{\rm hc} + V_☿ = 115.71$ км/с. Минимальное значение относительной скорости $V_{\min} = V_{\rm hc} - V_☿ = 19.97$ км/с.

Т.о., астероид может упасть на Меркурий с относительной скоростью, принадлежащей интевалу:

$$19.97 \text{ км/с } \le V_{\rm rel} \le 115.71 \text{ км/с}. \tag{37}$$

В момент падения его кинетическая энергия относительно Меркурия есть $\frac{1}{2}\mathfrak{M}_a\, V_{\rm rel}^2$, следовательно количество выделившейся теплоты есть

$$Q = \frac{1}{2}\,\eta\,\mathfrak{M}_a\, V_{\rm rel}^2. \tag{38}$$

С учетом (33), (37) и последнего результата имеем следующий интервал возможных значений количества теплоты:

$$3.340\cdot 10^{17} \text{ Дж } \le Q \le 1.121\cdot 10^{19} \text{ Дж}. \tag{39}$$

Ответ: $V_{\rm rel}^{\min} = 19.97$ км/с, $V_{\rm rel}^{\max} = 115.71$ км/с; $Q_{\min} = 3.340\cdot 10^{17}$ Дж, $Q_{\max} = 1.121\cdot 10^{19}$ Дж. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Последняя вспышка астероида»

Условие. Смогут ли наблюдать вспышку света земляне, которая сопровождает падение астероида на Меркурий (явление описано в условиях предыдущей задачи), если известно, что падение произошло на той части поверхности планеты, которая обращена к Земле. Известно, что за время вспышки ($t_{\text{всп}} = 30$ сек) высветилось 50% всей тепловой энергии, образовавшейся в процессе падения. Если могут, то оцените звездную величину вспышки (до целых). Поглощением света в атмосфере Земли пренебречь. (15 баллов).

Дано:

$t_{\text{всп}} = 30$ с,
$\chi = 0.50$.

Найти:

$h_{\min}, h_{\max}$ – ?

Решение:

Согласно условию задачи, в процессе падения выделилась количество теплоты Q, доля которого χ высветилась в окружающее пространство за время $t_{\text{всп}}$, следовательно, является разумным вычислить полный поток света (далее – ***светимость***), излученного во время вспышки:

$$L = \chi \frac{Q}{t_{\text{всп}}}. \tag{40}$$

Высвеченная в космос энергия (в случае *изотропного характера изучения*, т.е. равноправного во всех направлениях) была излучена в полусферу (вторая полусфера затмевается телом Меркурия). Следовательно, освещенность, создаваемая вспышкой на расстоянии Δ от точки столкновения представляется в виде:

$$E = \frac{L}{2\pi\Delta^2}. \tag{41}$$

Здесь было учтено, что $2\pi\Delta^2$ – площадь полусферы радиуса Δ. Как было уже сказано в решении задачи № 17, среднее расстояние от Солнца до Меркурия составляет $r_{☿} = 5.791 \cdot 10^7$ км, а до Земли – $r_{\oplus} = 1.4960 \cdot 10^8$ км. Следовательно, минимальное и максимальное расстояние Меркурия от Земли составляет:

$$\Delta_{\max} = r_{\oplus} + r_{☿} = 2.0751 \cdot 10^8 \text{ км}, \quad \Delta_{\min} = r_{\oplus} - r_{☿} = 9.169 \cdot 10^7 \text{ км}. \tag{42}$$

Следовательно, теперь можно найти минимальную и максимальную освещенность, создаваемую вспышкой у поверхности Земли:

$$E_{\min} = \chi \frac{Q_{\min}}{2\pi\, t_{\text{всп}}\, \Delta^2_{\max}} = 2.06 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2, \quad E_{\max} = \chi \frac{Q_{\max}}{2\pi\, t_{\text{всп}}\, \Delta^2_{\min}} = 3.54 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2. \tag{43}$$

Как известно, звезда нулевой звездной величины (0.0^m, например, Вега) создает у поверхности Земли освещенность $E_0 = 2.48 \cdot 10^{-8}$ Вт/м^2 (см. например, книгу Коновича и Мороза "Курс общей астрономии"). Очевидно, что минимальная освещенность незначительно отличается от последнего значения, следовательно, можно заключить, что данную вспышку в любом случае, в принципе, смогут наблюдать земляне (невооруженным глазом, без учета яркого света Солнца). В самом "неблагоприятном" сценарии (Меркурий – вблизи верхнего соединения, в случае падения с минимальной относительной скоростью) вспышка астероида будет видна как звезда нулевой звездной величины; вблизи нижнего соединения освещенность $E_{\max}$ больше E_0 в 143 раза, следовательно, согласно правилу Погсона, звездная величина вспышки для землянина будет меньше чем -5^m, поскольку $\Delta m = -5^m$, соответствует $E_{\max}/E_0 = 100$. Однако, в силу близости положения Меркурия (в указанных конфигурациях) к Солнцу и многократного превосходства последнего в величине освещенности, увидеть в действительности вспышки невооруженным глазом невозможно, лишь в телескопы с большим увеличением и малым полем зрения (например, с $200^{\times}$ увеличением и $30'$ минутным полем зрения).

На самом деле, наилучшая видимость Меркурия достигается в окрестности восточной и западной элонгаций, где расстояние между планетами есть $\Delta_{el} = \sqrt{r^2_{\oplus} - r^2_{☿}} = 1.379 \cdot 10^8$ км. В этом случае минимальная и максимальная освещенность у поверхности Земли, создаваемую вспышкой, есть

$$E_{\min}^{(el)} = \chi \frac{Q_{\min}}{2\pi\, t_{\text{всп}}\, \Delta_{el}^2} = 4.66 \cdot 10^{-8}~~\text{Вт/м}^2,~~E_{\max}^{(el)} = \chi \frac{Q_{\max}}{2\pi\, t_{\text{всп}}\, \Delta_{el}^2} = 1.56 \cdot 10^{-6}~~\text{Вт/м}^2. \qquad (44)$$

Заметим, что $E_{\min}^{(el)}/E_0 = 1.9$, что ближе к числу 2.512 нежели к 1, тогда минимальная звездная величина вспышки $m_{\min}^{(el)} \approx -1^m$, $E_{\max}^{(el)}/E_0 = 62.9$, что ближе существенно к 40 нежели к 100, тогда $m_{\max}^{(el)} \approx -4^m$.

Ответ: Вспышку можно будет наблюдать невооруженным глазом лишь в окрестности элонгаций с $m_{\min}^{(el)} \approx -1^m$, $m_{\max}^{(el)} \approx -4^m$; в телескопы с большим увеличением и малым полем зрения возможно, в принципе, наблюдение вспышки вблизи соединений Меркурия с $m_{\min} \approx 0^m$, $m_{\max} \approx -5^m$. ($\$_{\max} = 15$ баллов).